

AXIOMÁTICA DE LÓGICA POLIVALENTE Y DE CONJUNTOS POLIVALENTES

Antonio González Carlomán
Oviedo

I

ÁLGEBRA DE BOOLE Y RETÍCULO DE BOOLE COMPLETO

1. Álgebra de Boole

Sobre un colectivo \mathbb{E} se forma un álgebra de Boole si y sólo si, siendo u un determinado elemento de \mathbb{E} , se cumplen las siguientes condiciones:

1º Operaciones

Se pueden definir las operaciones:

- a) Una operación unitaria interna $*$ en \mathbb{E}
De un dato de \mathbb{E} se obtiene un resultado de \mathbb{E}
- b) Una operación binaria interna $+'$ en \mathbb{E}
De dos datos de \mathbb{E} se obtiene un resultado de \mathbb{E}

2º Abreviaciones

- a) i es una abreviación de u^* , y por lo tanto
 $i = u^*$
- b) Operación binaria interna \bullet en \mathbb{E} como abreviación de una composición mediante $+'$ y $*$
 $x, y \in \mathbb{E} \Rightarrow x \bullet y = (x^* +' y^*)^*$ (" \Rightarrow " = " induce ")

3º Axiomas

Para cualesquiera $a, b, c \in \mathbb{E}$, se cumplen las siguientes igualdades:

- A₁ Conmutatividad de $+'$
 $a +' b = b +' a$

A₂ Distributividad de +' respecto a •

$$a +' (b \bullet c) = (a +' b) \bullet (a +' c)$$

A₃ Absorción de +' respecto a •

$$a +' (a \bullet b) = a$$

A₄ Complementación en +'

$$a +' a^* = u$$

Esta axiomática fue publicada por el autor de este trabajo en la revista *Gaceta Matemática* del Consejo Superior de Investigaciones Científicas (1ª Serie, Tomo XXVIII, Nums.1 y 2, Madrid 1976).

2. Orden Reticular de Boole (Reticulo de Boole)

Una relación de orden \leq' sobre un colectivo \mathbb{E} es un orden reticular de Boole si y sólo si, siendo a, b y c cualesquiera elementos de \mathbb{E} , se cumplen las siguientes condiciones:

B₁ El orden \leq' en \mathbb{E} es un orden reticular, es decir:

- a) Cualquier conjunto, con dos elementos, $\{a, b\}$ de \mathbb{E} tiene minorantes y mayorantes en \mathbb{E} respecto a ese orden.
- b) Los minorantes de $\{a, b\}$ tienen un máximo en \mathbb{E} , al que llamamos extremo inferior de $\{a, b\}$ ($\inf\{a, b\}$), y los mayorantes de $\{a, b\}$ tienen un mínimo en \mathbb{E} al que llamamos extremo superior de $\{a, b\}$ ($\sup\{a, b\}$).

B₂ El colectivo \mathbb{E} tiene un mínimo i , al que llamamos elemento ínfimo, y un máximo u al que llamamos elemento universal.

B₃ El retículo indicado en B₁ es distributivo, es decir, que $\sup\{a, \inf\{b, c\}\} = \inf\{\sup\{a, b\}, \sup\{a, c\}\}$

B₄ El retículo indicado en B₁ es complementado, es decir, que existe una biyección en \mathbb{E} , $f: \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}$, de modo que:

a) La biyección es involutiva
 $x \in \mathbb{E} \implies f(f(x)) = x$

b) La biyección es antíttona en \leq'
Para $x, y \in \mathbb{E}$
 $x \leq' y \implies f(y) \leq' f(x)$

c) La biyección complementa a u
 $x \in \mathbb{E} \implies \sup\{x, f(x)\} = u$

3. Reticulo de Boole completo

El retículo de Boole definido en 2 puede ser completo o no:

Un retículo de Boole sobre \mathbb{E} es completo si y sólo si cualquier subconjunto no vacío de \mathbb{E} tiene extre-

mo inferior y superior.

Estudiémoslo:

3.1 Familias de elementos de E

a) Siendo I un colectivo de elementos a los que llamamos índices (normalmente I es \mathbb{N}^*) y H una parte no vacía de I , si tenemos una aplicación

$$a : H \rightarrow \mathbb{E}$$

Sabemos que

$$a(H) = \{a(x) \mid x \in H\} = \{a_x \mid x \in H\} = (a_x)_{x \in H}$$

Y a $a(H)$ en la forma $(a_x)_{x \in H}$ lo llamamos familia de elementos mediante x de H en \mathbb{E}

b) Siendo H y K partes no vacías de I , si tenemos una aplicación

$$b : H \times K \rightarrow \mathbb{E}$$

Sabemos que

$$b(H \times K) = \{b(x,y) \mid (x,y) \in H \times K\} = \{b_{xy} \mid (x,y) \in H \times K\} = (b_{xy})_{(x,y) \in H \times K}$$

Y a $b(H \times K)$ en la forma $(b_{xy})_{(x,y) \in H \times K}$ lo llamamos familia de elementos mediante (x,y) de $H \times K$ en \mathbb{E} .

3.2 Si convenimos que $\prod_{x \in H} \alpha_x = \inf(\alpha_x)_{x \in H}$, que $\sum_{x \in H} \alpha_x = \sup(\alpha_x)_{x \in H}$ y si tenemos en cuenta 2, la axiomática del retículo de Boole completo sería:

1º Abreviación

$$\sum_{x \in H} \alpha_x = (\prod_{x \in H} \alpha_x^*)^*$$

2º Axiomas

- B₁ El orden \leq' es reticular
- B₂ El orden \leq' tiene elemento ínfimo y universal
- B₃ El retículo indicado en B_1 es distributivo
- B₄ El retículo indicado en B_1 es complementado
- B₅ $\prod_{x \in H} \alpha_x \leq' \alpha_x$ (para cada $x \in H$)

3º Regla

Para cualquier $c \in \mathbb{E}$

$$c \leq' \alpha_x \iff c \leq' \prod_{x \in H} \alpha_x \text{ (para cada } x \in H)$$

4. Observaciones:

Los desarrollos de las axiomáticas 1, 2 y 3 están expuestos y demostrados en el libro del autor de este trabajo "Retículo completo de Boole, Lógica matemática, Teoría de conjuntos", publicado por el Servi-

cio de Publicaciones de la Universidad de Oviedo:

- a) En R-IV-1 (libro indicado) se desarrollan las propiedades esenciales del álgebra de Boole.
- b) En R-IV-2 se define $xRy \equiv x \cdot y = x$, y se ve que la relación R es de orden (reflexiva, antisimétrica y transitiva) y se demuestra que es un orden reticular. En adelante sustituiremos \leq' por R (" \equiv " = "si y sólo si")
- c) En R-IV-3 se define y desarrolla el retículo de Boole.
- d) En R-IV-3.1 se demuestra que de un álgebra de Boole se deduce un retículo de Boole.
- e) En R-IV-3.2 se demuestra que de un retículo de Boole se deduce un álgebra de Boole.
- f) En R-V-1 se define y desarrolla el retículo de Boole completo.

g) En R-V-1 se demuestra que si \mathbb{E} es finito, el retículo sobre él es completo, ya que, en ese caso, por R-IV-2.6.1, si $(\alpha_x)_{x \in H} = \{\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_m}\}$ ($i_1, i_2, \dots, i_m \in \mathbb{N}^*$)
 $\inf(\alpha_x)_{x \in H} = \inf\{\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_m}\} = \alpha_{i_1} \cdot \alpha_{i_2} \cdot \dots \cdot \alpha_{i_m}$ y
 $\sup(\alpha_x)_{x \in H} = \sup\{\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_m}\} = \alpha_{i_1} +' \alpha_{i_2} +' \dots +' \alpha_{i_m}$

Esto último acredita la nomenclatura indicada en 3.2.

h) Por d) y g), si sobre \mathbb{E} finito se puede formar un álgebra de Boole, entonces también sobre \mathbb{E} se puede formar un retículo completo de Boole.

i) Llamamos dual de una fórmula demostrada mediante álgebra de Boole a la que resulte de alterar entre sí \cdot y $+'$ y alterar entre sí i y u . Se probó, en R-IV-1.10, que demostrada, con su axiomática, una fórmula, también queda demostrada automáticamente su fórmula dual.

j) Llamamos dual de una fórmula demostrada mediante retículo de Boole completo a la que resulte de alterar entre sí los términos que separa \leq' además de alterar entre sí \cdot y $+'$ y alterar entre sí i y u . Se probó, en R-V-1.4, que demostrada, con su axiomática, una fórmula, también queda demostrada automáticamente su fórmula dual.

5. Retículo de Boole completo con números naturales

Definiendo, para $n \in \mathbb{N}^*$, el conjunto de los números naturales \mathbb{E}_n de modo que:

$$\mathbb{E}_n = \{x_1 x_2 \dots x_n \mid x_1, x_2, \dots, x_n \in \{0, 1\}\}$$

Vemos que:

$$\mathbb{E}_1 = \{0, 1\}$$

$$\mathbb{E}_2 = \{00, 01, 10, 11\}$$

$$\mathbb{E}_3 = \{000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111\}$$

etc.

Que representan, para cada $n \in \mathbb{N}^*$, todos los números naturales de n cifras (con ceros a la izquierda) en base 1+1 ($1+1=10$). El número de elementos distintos de \mathbb{E}_n es el de 2^n (VR_2^n).

Propiedades:

Sobre \mathbb{E}_n , para cada $n \geq 1$, se puede definir un álgebra de Boole.

En efecto:

5.1 Si $n = 1$

Determinando $u = 1$; se cumplen, para cada $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1 \in \mathbb{E}_1$, las siguientes condiciones:

1° Operaciones

a) Operación unitaria interna $*$ en \mathbb{E}_1
 $\alpha^* = 1 - \alpha$

b) Operación binaria interna $+'$ en \mathbb{E}_1
 $\alpha_1 +' \beta_1 = \max\{\alpha_1, \beta_1\}$

2° Abreviaciones

a) i es una abreviación de u^*
 $i = u^* (0 = 1^*)$

b) Operación binaria interna \bullet en \mathbb{E}_1
 $\alpha_1 \bullet \beta_1 = (\alpha_1^* +' \beta_1^*)^*$

3° Axiomas

Se cumplen las igualdades siguientes:

A₁ Conmutatividad de $+'$
 $\alpha_1 +' \beta_1 = \beta_1 +' \alpha_1$ (R-I-1.4)

A₂ Distributividad de $+'$ respecto a \bullet
 $\alpha_1 +' (\beta_1 \bullet \gamma_1) = (\alpha_1 +' \beta_1) \bullet (\alpha_1 +' \gamma_1)$ (R-I-1.5)

A₃ Absorción de $+'$ respecto a \bullet
 $\alpha_1 +' (\alpha_1 \bullet \beta_1) = \alpha_1$ (R-I-1.6)

A₄ complementación de $+'$
 $\alpha_1 +' \alpha_1^* = u$ (R-I-1.7)

5.2 Si $n \geq 2$

En el conjunto \mathbb{E}_n , dado el elemento determinado $u = 11..1$ (n unos) se cumplen, para cualesquiera $\alpha_1 \alpha_2 .. \alpha_n, \beta_1 \beta_2 .. \beta_n, \gamma_1 \gamma_2 .. \gamma_n \in \mathbb{E}_n$, las siguientes condiciones:

1º Operaciones

a) Operación unitaria interna $*$ en \mathbb{E}_n

$$(\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n)^* = \alpha_1^* \alpha_2^* \dots \alpha_n^*$$

b) Operación binaria interna $+'$ en \mathbb{E}_n

$$\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n +' \beta_1 \beta_2 \dots \beta_n = (\alpha_1 +' \beta_1)(\alpha_2 +' \beta_2) \dots (\alpha_n +' \beta_n)$$

2º Abreviaciones

a) i es una abreviación de u^* ($i = u^*$)

b) Operación binaria \bullet en \mathbb{E}_n como composición de $*$ y $+'$

$$\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \bullet \beta_1 \beta_2 \dots \beta_n = ((\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n)^* +' (\beta_1 \beta_2 \dots \beta_n)^*)^*$$

$$b_1) \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \bullet \beta_1 \beta_2 \dots \beta_n = (\alpha_1 \bullet \beta_1)(\alpha_2 \bullet \beta_2) \dots (\alpha_n \bullet \beta_n) \quad (\text{R-VI-1.1-ii-2º-b}_1)$$

3º Axiomas

A₁ Conmutatividad de $+'$

$$\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n +' \beta_1 \beta_2 \dots \beta_n = \beta_1 \beta_2 \dots \beta_n +' \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \quad (\text{R-VI-1.1-ii-3º-A}_1)$$

A₂ Distributividad de $+'$ respecto a \bullet

$$\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n +' (\beta_1 \beta_2 \dots \beta_n \bullet \gamma_1 \gamma_2 \dots \gamma_n) = (\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n +' \beta_1 \beta_2 \dots \beta_n) \bullet (\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n +' \gamma_1 \gamma_2 \dots \gamma_n) \quad (\text{R-VI-1.1-ii-3º-A}_2)$$

A₃ Absorción de $+'$ respecto a \bullet

$$\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n +' (\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \bullet \beta_1 \beta_2 \dots \beta_n) = \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \quad (\text{R-VI-1.1-ii-3º-A}_3)$$

A₄ Complementación de $+'$

$$\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n +' (\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n)^* = u \quad (\text{R-VI-1.1-ii-3º-A}_4)$$

5.3. Con el desarrollo de la axiomática anterior, se define el orden \leq' de modo que

$$\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \leq' \beta_1 \beta_2 \dots \beta_n \equiv \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \bullet \beta_1 \beta_2 \dots \beta_n = \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n$$

Y este orden define un retículo de Boole completo, ya que \mathbb{E}_n es finito (4-g)

$$5.4. \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \leq' \beta_1 \beta_2 \dots \beta_n \equiv \alpha_1 \leq \beta_1 \wedge \alpha_2 \leq \beta_2 \wedge \dots \wedge \alpha_n \leq \beta_n \quad (\text{R-VI-2.2})$$

$$5.5. \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \leq' \beta_1 \beta_2 \dots \beta_n \equiv \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \leq \beta_1 \beta_2 \dots \beta_n \quad (\text{R-VI-2.3})$$

5.6. Con los elementos de \mathbb{E}_n , sin los ceros a la izquierda, se forma la siguiente sucesión creciente respecto al orden $<$ numérico:

$$0 < 1 < 10 < 11 < \dots < 11..10 < 11..11$$

Que en base 9+1 sería:

$$0 < 1 < 2 < 3 < \dots < 2^n - 2 < 2^n - 1$$

Observemos que se cumple:

$$\mathbb{E}_1 \subset \mathbb{E}_2 \subset \mathbb{E}_3 \subset \dots$$

6. Retículo de Boole completo con números racionales

Definiendo, para $n \in \mathbb{N}^*$, el conjunto de los números racionales \mathbb{F}_n de modo que:

$$\mathbb{F}_n = \left\{ \frac{x_1 x_2 \dots x_n}{11\dots 1} \mid x_1 x_2 \dots x_n \in \mathbb{E}_n \right\}$$

Vemos que:

$$\mathbb{F}_1 = \left\{ \frac{0}{1}, \frac{1}{1} \right\}$$

$$\mathbb{F}_2 = \left\{ \frac{00}{11}, \frac{01}{11}, \frac{10}{11}, \frac{11}{11} \right\}$$

$$\mathbb{F}_3 = \left\{ \frac{000}{111}, \frac{001}{111}, \frac{010}{111}, \frac{011}{111}, \frac{100}{111}, \frac{101}{111}, \frac{110}{111}, \frac{111}{111} \right\}$$

etc.

Propiedades:

Sobre \mathbb{F}_n , para cada $n \geq 1$, se puede definir un álgebra de Boole en que $u = 1$

6.1 Operaciones definidas sobre \mathbb{F}_n para $n \in \mathbb{N}^*$

a) Operación unitaria $*$ en \mathbb{F}_n

$$\left(\frac{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n}{11\dots 1} \right)^* = \frac{\alpha_1^* \alpha_2^* \dots \alpha_n^*}{11\dots 1}$$

b) Operación binaria $+'$ en \mathbb{F}_n

$$\frac{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n}{11\dots 1} +' \frac{\beta_1 \beta_2 \dots \beta_n}{11\dots 1} = \frac{(\alpha_1 +' \beta_1)(\alpha_2 +' \beta_2) \dots (\alpha_n +' \beta_n)}{11\dots 1}$$

6.2 En la aplicación $f: \mathbb{E}_n \rightarrow \mathbb{F}_n$, tal que

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{E}_n \Rightarrow f(\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n) = \frac{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n}{11\dots 1}$$

Se cumplen:

a) Es biyectiva

b) Son homomorfas, y por lo tanto isomorfas, las dos estructuras $\mathbb{E}_n, *, +'$ y $\mathbb{F}_n, *, +'$

Y como la estructura $\mathbb{E}_n, *, +'$ forma un álgebra de Boole y por lo tanto un retículo de Boole completo, entonces también la estructura $\mathbb{F}_n, *, +'$ formará un álgebra de Boole y por lo tanto un retículo de Boole completo.

6.3 Con los elementos de \mathbb{F}_n , sin los ceros a la izquierda, se forma la siguiente sucesión creciente respecto al orden $<$ numérico:

Si $n=1$

En base 1+1 y en base 9+1

$$0 < 1$$

Si $n=2$

En base 1+1

$$0 < \frac{1}{11} < \frac{10}{11} < 1$$

En base 9+1

$$0 < \frac{1}{3} < \frac{2}{3} < 1$$

Si $n=3$

En base 1+1

$$0 < \frac{1}{111} < \frac{10}{111} < \frac{11}{111} < \frac{100}{111} < \frac{101}{111} < \frac{110}{111} < 1$$

En base 9+1

$$0 < \frac{1}{7} < \frac{2}{7} < \frac{3}{7} < \frac{4}{7} < \frac{5}{7} < \frac{6}{7} < 1$$

Si $n \geq 4$

En base 1+1

$$0 < \frac{1}{11..1} < \frac{10}{11..1} < .. < \frac{11..10}{11..1} < 1$$

En base 9+1

$$0 < \frac{1}{2^{n-1}} < \frac{2}{2^{n-1}} < .. < \frac{2^n-2}{2^{n-1}} < 1$$

Estas sucesiones son progresiones aritméticas que, en el caso de base 9+1 y $n \in \mathbb{N}^*$, tienen 2^n términos, 0 como primer término, 1 como último término y $\frac{1}{2^{n-1}}$ como su diferencia.

II

ÁLGEBRA DE BOOLE Y RETÍCULO DE BOOLE COMPLETO DE LÓGICA POLIVALENTE

1. Familia de proposiciones polivalentes

a) Siendo U el universo del discurso; si \mathcal{P} representa al colectivo de proposiciones simples y compuestas, H a una parte no vacía de U (o incluso de \mathbb{N}^*), y dada una aplicación

$$\mathcal{P} : H \rightarrow \mathcal{P}$$

Sabemos que

$$\mathcal{P}(H) = \{\mathcal{P}(x) \mid x \in H\} = \{\mathcal{P}_x \mid x \in H\} = (\mathcal{P}_x)_{x \in H}$$

Y a $\mathcal{P}(H)$, en la forma $(\mathcal{P}_x)_{x \in H}$, la llamamos familia de proposiciones mediante x de H en \mathcal{P} .

b) Siendo H y K partes no vacías de U (o incluso de \mathbb{N}^*), si tenemos una aplicación

$$\mathcal{R} : H \times K \rightarrow \mathcal{P}$$

Sabemos que

$$\mathcal{R}(H \times K) = \{\mathcal{R}(x, y) \mid (x, y) \in H \times K\} = \{\mathcal{R}_{xy} \mid (x, y) \in H \times K\} = (\mathcal{R}_{xy})_{(x, y) \in H \times K}$$

Y a $\mathcal{R}(H \times K)$ en la forma $(\mathcal{R}_{xy})_{(x, y) \in H \times K}$, la llamamos familia de proposiciones mediante (x, y) de $H \times K$ en P .

2. Proposiciones cuantificadas

Mediante estas familias, y suponiendo que x y y actúan como variables sujetos en \mathcal{P}_x y \mathcal{R}_{xy} (o siendo $x, y \in \mathbb{N}^*$), definimos, en R-II-5, las proposiciones cuantificadas:

a) $\forall_{x \in H} \mathcal{P}_x$; b) $\exists_{x \in H} \mathcal{P}_x$; c) $\forall_{x \in H} \exists_{y \in K} \mathcal{R}_{xy}$; d) $\forall_{x \in H} \forall_{y \in K} \mathcal{R}_{xy}$; etc.

3. Valoración polivalente de las proposiciones lógicas sobre \mathbb{F}_n ($n \in \mathbb{N}^*$)

Siendo \mathbb{P} el colectivo de todas las proposiciones simples, compuestas o cuantificadas con sujetos de U (o elementos de \mathbb{N}^* si se trata de familias de proposiciones) y \mathbb{F}_n el conjunto de números racionales que forma un retículo completo de Boole (I-6) definimos:

$$\phi : \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{F}_n$$

de la siguiente manera:

Para cualesquiera $P, Q \in \mathbb{P}$ y cualquier familia $(\mathcal{P}_x)_{x \in H}$ de H en \mathbb{P} , y representando $\phi(\mathcal{P}_x)_{x \in H}$ una familia de H en \mathbb{F}_n

1° Si P es una proposición simple

Asignamos a $\phi(P)$ un valor en la escala de \mathbb{F}_n , respecto al orden \leq de los números racionales, que marque el grado de fiabilidad de la verdad de P ($0 \leq \phi(P) \leq 1$) teniendo en cuenta:

- a) Las proposiciones simples que tengan valor cero (0) de \mathbb{F}_n , tienen el grado mínimo de fiabilidad de verdad; tienen fiabilidad nula, son totalmente falsas.
- b) Las proposiciones simples que tengan valor uno (1) de \mathbb{F}_n , tienen el grado máximo de fiabilidad de verdad; son totalmente verdaderas.
- c) Las proposiciones simples que tengan valor fraccionario de \mathbb{F}_n , tienen un grado fraccionario de fiabilidad de verdad, es decir, tienen pérdida de verdad; pero no toda.

2° Si P es una proposición simple, compuesta o cuantificada

$$\phi(\neg P) = \phi(P)^*$$

3° Si P o Q son proposiciones simples, compuestas o cuantificadas

$$\phi(P \vee Q) = \phi(P) +^i \phi(Q)$$

4° Si la familia $(\mathcal{P}_x)_{x \in H}$ está formada por proposiciones simples, compuestas o cuantificadas

$$\phi(\forall_{x \in H} \mathcal{P}_x) = \inf \phi(\mathcal{P}_x)_{x \in H}$$

5° Si convenimos que $P \wedge Q$ y $\exists_{x \in H} \mathcal{P}_x$ son respectivamente abreviaciones de $\neg(\neg P \vee \neg Q)$ y de $\neg \forall_{x \in H} \neg \mathcal{P}_x$, resultaría que se podrían valorar tales abreviaciones aplicando 1°, 2°, 3° o 4°.

Observemos que para valorar 1° utilizamos el orden numérico \leq en \mathbb{F}_n , para valorar 2° y 3° utilizamos el álgebra de Boole en \mathbb{F}_n y para valorar 4° utilizamos el retículo de Boole completo con su orden \leq' en \mathbb{F}_n .

Propiedades:

Para cualesquiera $P, Q \in \mathbb{P}$ y cualquier familia $(P_x)_{x \in H}$ de H en \mathbb{P}

$$3.1 \phi(P \wedge Q) = \phi(P) \cdot \phi(Q) \quad (\text{R-VII-1.1})$$

$$3.2 \phi(\exists_{x \in H} P_x) = \sup \phi(P_x)_{x \in H} \quad (\text{R-VII-1.2})$$

3.3 Suponiendo que P es una proposición simple con un predicado p y una variable sujeto $z \in U$ y convenimos que $P = p(z)$, podríamos definir la aplicación

$\phi_p : U \rightarrow \mathbb{F}_n$, tal que

$$z \in U \Rightarrow \phi_p(z) = \phi(p(z))$$

Esta aplicación define la familia $\phi(p(z))_{z \in U}$. Y esta familia de valores de \mathbb{F}_n nos indica el grado del cumplimiento de la predicación p para cada elemento de U .

4. Relaciones en \mathbb{P} mediante valores de \mathbb{F}_n para $n \in N^*$

a) Relación \Leftrightarrow en \mathbb{P}

$\mathcal{X} \Leftrightarrow \mathcal{Y} \equiv \phi(\mathcal{X}) = \phi(\mathcal{Y})$ (léase: \mathcal{X} equivale a \mathcal{Y})

(\Leftrightarrow es relación de equivalencia por ser reflexiva, simétrica y transitiva, por R-VII-2.1)

b) Relación \Rightarrow en \mathbb{P}

$\mathcal{X} \Rightarrow \mathcal{Y} \equiv \phi(\mathcal{X}) \leq' \phi(\mathcal{Y})$ (léase: \mathcal{X} implica lógicamente a \mathcal{Y}) (Por I-5.5), $\mathcal{X} \Rightarrow \mathcal{Y} \equiv \phi(\mathcal{X}) \leq \phi(\mathcal{Y})$)

(\Rightarrow es relación de orden por ser reflexiva, antisimétrica y transitiva, por R-IV-2')

5. Álgebra de Boole de la lógica polivalente

Propiedades:

Siendo u una proposición tal que $\phi(u) = 1$; para cualesquiera $P, Q, R \in \mathbb{P}$ y valorando sobre \mathbb{F}_n , para $n \in N^*$, se cumplen:

5.1 Siendo i una abreviación de $\neg u$

$$i \Leftrightarrow \neg u \quad (\phi(i) = \phi(\neg u))$$

$$5.2 P \wedge Q \Leftrightarrow \neg(\neg P \vee \neg Q) \quad (\phi(P \wedge Q) = \phi(\neg(\neg P \vee \neg Q))) \quad (\text{R-VII-3.2})$$

5.3 Conmutatividad de \vee

$$P \vee Q \Leftrightarrow Q \vee P \quad (\phi(P \vee Q) = \phi(Q \vee P)) \quad (\text{R-VII-3.3})$$

5.4 Distributividad de \vee respecto a \wedge

$$P \vee (Q \wedge R) \Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (P \vee R) \quad (\phi(P \vee (Q \wedge R)) = \phi((P \vee Q) \wedge (P \vee R))) \quad (\text{R-VII-3.4})$$

5.5 Absorción de \vee respecto a \wedge

$$P \vee (P \wedge Q) \Leftrightarrow P \quad (\phi(P \vee (P \wedge Q)) = \phi(P)) \quad (\text{R-VII-3.5})$$

5.6 Complementación en disyunción

$$P \vee \neg P \Leftrightarrow \mathbf{u} \quad (\phi(P \vee \neg P) = \phi(\mathbf{u})) \quad (\text{R-VII-3.6})$$

Y vemos, al observar la definición indicada en I-1, que estas propiedades validan a la lógica polivalente como un álgebra de Boole. Recordemos que cualquier axiomática sólo depende de las fórmulas y reglas (su estructura) sin importarnos cómo éstas fueron construídas ni el tipo de lenguaje utilizado para ello.

Las diferencias lingüísticas entre la axiomática abstracta del álgebra de Boole y la misma axiomática aplicada a la lógica polivalente son las siguientes:

a) Cambiar "=" por " \Leftrightarrow ". b) Cambiar la operación binaria abreviada "*" por la operación binaria abreviada " \wedge ". c) Cambiar la operación unitaria "*" por la operación unitaria " \neg ". d) Cambiar la operación binaria "+'" por la operación binaria " \vee ".

En resumen, la lógica polivalente es un modelo de la axiomática abstracta de álgebra de Boole definida en I-1.

Observemos que esta axiomática de álgebra de Boole de la lógica polivalente es idéntica a la axiomática de álgebra de Boole de la lógica binaria estudiada en R-IV-1' (libro).

6. Retículo de Boole de la lógica polivalente

Como vimos, en I-4-d, que de un álgebra de Boole se deduce, en R-IV-3'.1', un retículo de Boole, entonces del álgebra de Boole de las proposiciones polivalentes se deduce, por la identidad anteriormente indicada, el retículo de Boole correspondiente al idéntico deducido en R-IV-3'.1'.

La diferencia lingüística está en el cambio del signo \leq' ($x \leq' y \equiv x \bullet y = x$), que indica el orden reticular abstracto, por el signo \Rightarrow ($\mathcal{X} \Rightarrow \mathcal{Y} \equiv \mathcal{X} \wedge \mathcal{Y} \Leftrightarrow \mathcal{X}$), que indica el orden reticular de la lógica polivalente. La definición $\mathcal{X} \Rightarrow \mathcal{Y} \equiv \phi(\mathcal{X}) \leq' \phi(\mathcal{Y})$, indicada en 4-b, no está en desacuerdo con la obtenida al desarrollar el álgebra de Boole, puesto que:

$$\begin{aligned} \mathcal{X} \wedge \mathcal{Y} \Leftrightarrow \mathcal{X} &\equiv \phi(\mathcal{X}) \leq' \phi(\mathcal{Y}) \\ (\mathcal{X} \wedge \mathcal{Y} \Leftrightarrow \mathcal{X} &\equiv \phi(\mathcal{X} \wedge \mathcal{Y}) = \phi(\mathcal{X}) \equiv \phi(\mathcal{X}) \bullet \phi(\mathcal{Y}) = \phi(\mathcal{X}) \equiv \phi(\mathcal{X}) \leq' \phi(\mathcal{Y})). \end{aligned}$$

7. Retículo de Boole completo de lógica polivalente

7.1 Como vimos, en VII-4.2, que la axiomática del retículo de Boole completo de lógica polivalente es la del retículo de Boole añadiéndole tres nuevas propiedades; estas tres nuevas propiedades son:

1) Abreviación

$$\exists_{x \in H} \mathcal{P}_x \Leftrightarrow \neg \forall_{x \in H} \neg \mathcal{P}_x \quad (\text{R-VII-3.7})$$

2) axioma

$$\forall_{x \in H} \mathcal{P}_x \Rightarrow \mathcal{P}_x \quad (\text{para cada } x \in H) \quad (\text{R-VII-3.8})$$

3) Regla

$$Q \Rightarrow \mathcal{P}_x \Rightarrow Q \Rightarrow \forall_{x \in H} \mathcal{P}_x \quad (\text{para cada } x \in H) \quad (\text{R-VII-3.9})$$

7.2 Por ser la axiomática de retículo de Boole completo en lógica binaria (V-1') idéntica a la axiomática de retículo de Boole completo en lógica polivalente, se cumple en lógica polivalente, si $0 < m < 2^n$ y $H = \{i_1, i_2, \dots, i_m\}$ ($H \subseteq U$ o $H \subseteq N^*$) que:

- a) $\forall_{x \in H} \mathcal{P}_x \Leftrightarrow \mathcal{P}_{i_1} \wedge \mathcal{P}_{i_2} \wedge \dots \wedge \mathcal{P}_{i_m}$ (V-1'.5')
- b) $\exists_{x \in H} \mathcal{P}_x \Leftrightarrow \mathcal{P}_{i_1} \vee \mathcal{P}_{i_2} \vee \dots \vee \mathcal{P}_{i_m}$ (V-1'.5')
- c) $\phi(\forall_{x \in H} \mathcal{P}_x) = \phi(\mathcal{P}_{i_1}) \cdot \phi(\mathcal{P}_{i_2}) \cdot \dots \cdot \phi(\mathcal{P}_{i_m})$ (3.1)
- d) $\phi(\exists_{x \in H} \mathcal{P}_x) = \phi(\mathcal{P}_{i_1}) + \phi(\mathcal{P}_{i_2}) + \dots + \phi(\mathcal{P}_{i_m})$ (3-3°)

8. Conclusión

Existe sólo un soporte axiomático para las distintas sucesiones que valoran las proposiciones lógicas polivalentes, la diferencia está sólo en la longitud de dichas sucesiones de valores: $\mathbb{F}_1, 2^1; \mathbb{F}_2, 2^2; \mathbb{F}_3, 2^3; \dots; \mathbb{F}_n, 2^n$.

En el libro indicado en I-4, tenemos demostradas, sobre el soporte axiomático común, los siguientes bloques de propiedades: IV-1', IV-2', IV-3', V-1' y V-2', válidas para cualquier sucesión de valores. Evidentemente, pueden obtenerse nuevas propiedades de la axiomática.

III

ÁLGEBRA DE BOOLE Y RETÍCULO DE BOOLE COMPLETO DE CONJUNTOS POLIVALENTES

1. Proposiciones conjuntistas polivalentes

Dado un universo del discurso U , un elemento b de U y un conjunto A de U ($A \in \mathcal{P}(U)$), la expresión $b \in A$ (b pertenece a A) es una proposición conjuntista (b sujeto, \in verbo y A complemento del predicado). Ahora podemos representar, en la aplicación valorativa $\phi : \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{F}_n$ ($n \in \mathbb{N}^*$), más explícitamente, una proposición cerrada P de \mathbb{P} en la forma $b \in A$, y si fuese abierta, en la forma $x \in A$. En este último caso, podríamos definir la aplicación

$\phi_A : U \rightarrow \mathbb{F}_n$, tal que

$$x \in U \Rightarrow \phi_A(x) = \phi(x \in A)$$

Esta aplicación nos define la familia $\phi_A(x)_{x \in U}$. Y esta familia de valores de \mathbb{F}_n nos indica el grado de pertenencia en el conjunto A de cada elemento de U ; definiendo, por lo tanto, al conjunto polivalente A de U :

- a) Los elementos de U que tengan en A grado de pertenencia cero (0) no están en A .
- b) Los elementos de U que tengan en A grado de pertenencia uno (1), están en A enteramente, sin ninguna pérdida de pertenencia.
- c) Los elementos de U que tengan en A grados de pertenencia fraccionarios están en A fraccionalmente, es decir, tienen pérdida de pertenencia; pero no toda.

2. Otras definiciones

a) Conjunto universal polivalente

Es el conjunto que contiene todos los elementos del universo del discurso y cada uno de ellos con grado de pertenencia uno (1). Se menciona como el universo del discurso, conjunto U .

b) Conjunto vacío polivalente

Es el conjunto sin elementos del universo del discurso, y por lo tanto el grado de pertenencia de cada uno de los elementos de U a él es cero (0). Se menciona con el signo \emptyset , conjunto \emptyset .

c) Conjuntos polivalentes iguales

Dos conjuntos polivalentes A y B son iguales si y sólo si, para cada elemento de U , su grado de pertenencia en A es igual a su grado de pertenencia en B .

$$A = B \equiv \phi_A(x) = \phi_B(x) \text{ (para cada } x \in U)$$

$$c_1) A = B \equiv x \in A \Leftrightarrow x \in B$$

$$(A = B \equiv \phi_A(x) = \phi_B(x) \equiv \phi(x \in A) = \phi(x \in B) \equiv x \in A \Leftrightarrow x \in B)$$

d) Inclusión normal de dos conjuntos polivalentes

Un conjunto polivalente A está incluido normalmente en un conjunto polivalente B , y lo representamos por $A \subseteq B$, si y sólo si, para cada elemento de U , su grado de pertenencia en A es igual o anterior a su grado de pertenencia en B respecto al orden reticular \leq' .

$$A \subseteq B \equiv \phi_A(x) \leq' \phi_B(x) \text{ (para cada } x \text{ de } U) \text{ (Por I-5.5, } A \subseteq B \Rightarrow \phi_A(x) \leq \phi_B(x))$$

$$d_1) A \subseteq B \equiv x \in A \Rightarrow x \in B$$

$$(A \subseteq B \equiv \phi_A(x) \leq' \phi_B(x) \equiv \phi(x \in A) \leq' \phi(x \in B) \equiv x \in A \Rightarrow x \in B)$$

e) Inclusión estricta de dos conjuntos polivalentes

Un conjunto polivalente A está incluido estrictamente en un conjunto polivalente B , y lo representamos por $A \subset B$, si y sólo si, para cada elemento de U , su grado de pertenencia en A es anterior a su grado de pertenencia en B respecto al orden reticular $<'$ ($a <' b \Leftrightarrow a \leq' b \wedge a \neq b$).

$$A \subset B \equiv \phi_A(x) <' \phi_B(x) \text{ (para cada } x \text{ de } U) \text{ (Por I-5.5, } A \subset B \Rightarrow \phi_A(x) < \phi_B(x))$$

3. Conjuntos polivalentes deducidos de otros

a) Complementario del conjunto polivalente A de U

Llamamos complementario del conjunto polivalente A de U , y lo representamos por A^- , al conjunto polivalente de U

$$A^- = \{x \mid \neg x \in A\} \text{ (} U \text{ implícito)}$$

Que es el conjunto de los elementos $x \in U$ tales que
 $\phi(x \in A^-) = \phi(-x \in A) \neq 0$

a₁) Por la definición, para cada $x \in U$

$$x \in A^- \Leftrightarrow -x \in A \text{ (II-4-a)}$$

a₂) Para cada $x \in U$

$$\begin{aligned} \phi_{A^-}(x) &= \phi_A(x)^* \\ (\phi_{A^-}(x) &= \phi(x \in A^-) = \phi(-x \in A) = \phi(x \in A)^* = \phi_A(x)^*) \end{aligned}$$

a₃) Para cada $x \in U$

$$\begin{aligned} \phi_{U^-}(x) &= \phi_\emptyset(x) \\ (\phi_{U^-}(x) &= \phi_U(x)^* = 1^* = 0 = \phi_\emptyset(x)) \end{aligned}$$

a₄) $U^- = \emptyset$

b) Diferencia de A y B

Llamamos diferencia de los conjuntos polivalentes A y B de U , y la representamos por $A - B$, al conjunto polivalente de U

$$A - B = \{x \mid x \in A \wedge -x \in B\} \text{ (} U \text{ implícito)}$$

Que es el conjunto de los elementos $x \in U$ tales que
 $\phi(x \in A - B) = \phi(x \in A \wedge -x \in B) \neq 0$.

b₁) Por la definición, para cada $x \in U$

$$x \in A - B \Leftrightarrow x \in A \wedge -x \in B$$

b₂) Para cada $x \in U$

$$\begin{aligned} \phi_{A-B}(x) &= \phi_A(x) \cdot \phi_B(x)^* \\ (\phi_{A-B}(x) &= \phi(x \in A - B) = \phi(x \in A \wedge -x \in B) = \phi(x \in A) \cdot \phi(-x \in B) = \phi(x \in A) \cdot \phi(x \in B)^* = \\ &\phi_A(x) \cdot \phi_B(x)^*) \end{aligned}$$

c) Unión de los conjuntos polivalentes A y B de U

Llamamos unión de los conjuntos polivalentes A y B de U , y la representamos por $A \cup B$, al conjunto polivalente de U

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\} \text{ (} U \text{ implícito)}$$

Que es el conjunto de los elementos $x \in U$ tales que
 $\phi(x \in A \cup B) = \phi(x \in A \vee x \in B) \neq 0$

c₁) Por la definición, para cada $x \in U$

$$x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A \vee x \in B$$

c₂) Para cada $x \in U$

$$\phi_{A \cup B}(x) = \phi_A(x) +' \phi_B(x)$$

$$(\phi_{A \cup B}(x) = \phi(x \in A \cup B) = \phi(x \in A \vee x \in B) = \phi(x \in A) +' \phi(x \in B) = \phi_A(x) +' \phi_B(x))$$

d) Intersección de los conjuntos polivalentes A y B de U

Llamamos intersección de los conjuntos polivalentes A y B de U , y la representamos por $A \cap B$, al conjunto polivalente de U

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\} \quad (U \text{ implícito})$$

Que es el conjunto de los elementos $x \in U$ tales que

$$\phi(x \in A \cap B) = \phi(x \in A \wedge x \in B) \neq 0$$

d₁) Por la definición, para cada $x \in U$

$$x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in A \wedge x \in B$$

d₂) Para cada $x \in U$

$$\phi_{A \cap B}(x) = \phi_A(x) \cdot \phi_B(x)$$

$$(\phi_{A \cap B}(x) = \phi(x \in A \cap B) = \phi(x \in A \wedge x \in B) = \phi(x \in A) \cdot \phi(x \in B) = \phi_A(x) \cdot \phi_B(x))$$

4. Álgebra de Boole de los conjuntos polivalentes

Para cualesquiera conjuntos polivalentes $A, B, C \in P(U)$, se ve, siendo U el elemento determinado de $P(U)$ (I-1), que se puede formar la siguiente axiomática:

1° Operaciones

a) Operación unitaria interna – en $P(U)$

b) Operación binaria interna \cup en $P(U)$

2° Abreviaciones

a) \emptyset es una abreviación de U^-

$$\emptyset = U^- \quad (3-a_4)$$

b) Operación binaria interna \cap en $P(U)$

$$X, Y \in P(U) \Rightarrow X \cap Y = (X^- \cup Y^-)^- \quad (x \in X \cap Y \Leftrightarrow x \in (X^- \cup Y^-)^-)$$

3° Axiomas

A₁ Conmutatividad de \cup

$$A \cup B = B \cup A \quad (x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in B \cup A)$$

A₂ Distributividad de \cup respecto a \cap

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \quad (x \in A \cup (B \cap C) \Leftrightarrow x \in (A \cup B) \cap (A \cup C))$$

A₃ Absorción de \cup respecto a \cap

$$A \cup (A \cap B) = A \quad (x \in A \cup (A \cap B) \Leftrightarrow x \in A)$$

A₄ Complementación en \cup

$$A \cup A^- = U \quad (x \in A \cup A^- \Leftrightarrow x \in U)$$

Y vemos que esta axiomática es la de un álgebra de Boole al observar la definición indicada en I-1. Las diferencias lingüísticas entre la axiomática abstracta del álgebra de Boole y la misma axiomática aplicada a los conjuntos polivalentes son las siguientes:

a) Cambiar u e i respectivamente por U y \emptyset . b) Cambiar la operación binaria abreviada " \bullet " por la operación binaria abreviada " \cap ". c) Cambiar la operación unitaria " \ast " por la operación unitaria " $-$ ". d) Cambiar la operación binaria " $+$ " por la operación binaria " \cup ".

En resumen, los conjuntos polivalentes son un modelo de la axiomática abstracta de álgebra de Boole definida en I-1.

Observemos que esta axiomática de álgebra de Boole de los conjuntos polivalentes es idéntica a la axiomática de álgebra de Boole de los conjuntos binarios estudiados en R-IV-1'' (libro).

5. Retículo de Boole de los conjuntos polivalentes

Como vimos, en I-4-d, que de un álgebra de Boole se deduce, en R-IV-3'' .1'', un retículo de Boole, entonces del álgebra de Boole de los conjuntos polivalentes se deduce, por la identidad anteriormente indicada, el retículo de Boole correspondiente al idéntico deducido en R-IV-3'' .1''.

La diferencia lingüística está en el cambio del signo \leq' ($x \leq' y \equiv x \bullet y = x$), que indica el orden reticular abstracto, por el signo \subseteq ($X \subseteq Y \equiv X \cap Y = X$) que indica el orden reticular de los conjuntos polivalentes. La definición $X \subseteq Y \equiv \phi_X(x) \leq' \phi_Y(x)$, vista en 2-d, no está en desacuerdo con la obtenida al desarrollar el álgebra de Boole, puesto que:

$$\begin{aligned} X \cap Y = X &\equiv \phi_X(x) \leq' \phi_Y(x) \\ (X \cap Y = X \equiv x \in X \cap Y \Leftrightarrow x \in X \wedge x \in Y \Leftrightarrow x \in X &\equiv \phi(x \in X \wedge x \in Y) = \phi(x \in X) \equiv \\ \phi(x \in X) \bullet \phi(x \in Y) = \phi(x \in X) &\equiv \phi_X(x) \bullet \phi_Y(x) = \phi_X(x) \equiv \phi_X(x) \leq' \phi_Y(x)) \end{aligned}$$

6. Familias de conjuntos polivalentes

a) Siendo I un colectivo de elementos a los que llamamos índices (normalmente I es el conjunto \mathbb{N}^* de los números naturales), y H una parte no vacía de I , si tenemos una aplicación

$$\mathcal{A} : H \rightarrow P(U)$$

Sabemos que

$$\mathcal{A}(H) = \{\mathcal{A}(x) \mid x \in H\} = \{\mathcal{A}_x \mid x \in H\} = (\mathcal{A}_x)_{x \in H}$$

Y a $\mathcal{A}(H)$ en la forma $(\mathcal{A}_x)_{x \in H}$ lo llamamos familia de conjuntos polivalentes de U mediante x de H .

b) Si tenemos una aplicación

$$\mathcal{B} : H \times K \rightarrow P(U)$$

Obtenemos como antes que

$$\mathcal{B}(H \times K) = (\mathcal{B}_{xy})_{(x,y) \in H \times K}$$

Y a $(\mathcal{B}_{xy})_{(x,y) \in H \times K}$ lo llamamos familia de conjuntos polivalentes de U mediante (x,y) de $H \times K$.

7. Conjuntos polivalentes deducidos de familias de conjuntos polivalentes

a) Intersección de la familia $(\mathcal{A}_x)_{x \in H}$ de conjuntos polivalentes de U

Llamamos intersección de la familia $(\mathcal{A}_x)_{x \in H}$, y la representamos por $\bigcap_{x \in H} \mathcal{A}_x$, al conjunto polivalente de U

$$\bigcap_{x \in H} \mathcal{A}_x = \{z \mid \forall_{x \in H} z \in \mathcal{A}_x\} \quad (U \text{ implícito})$$

Que es el conjunto de los elementos $z \in U$ tales que

$$\phi(z \in \bigcap_{x \in H} \mathcal{A}_x) = \phi(\forall_{x \in H} z \in \mathcal{A}_x) \neq 0$$

a₁) por la definición

$$z \in \bigcap_{x \in H} \mathcal{A}_x \Leftrightarrow \forall_{x \in H} z \in \mathcal{A}_x$$

a₂) Para cada $z \in U$, y por II-7.2-c

$$\begin{aligned} \phi_{\bigcap_{x \in H} \mathcal{A}_x}(z) &= \phi_{\mathcal{A}_{i_1}}(z) \cdot \phi_{\mathcal{A}_{i_2}}(z) \cdot \dots \cdot \phi_{\mathcal{A}_{i_m}}(z) \quad (0 < m < 2^n) \quad (i_1, i_2, \dots, i_m \in N^*) \\ (\phi_{\bigcap_{x \in H} \mathcal{A}_x}(z) &= \phi(z \in \bigcap_{x \in H} \mathcal{A}_x) = \phi(\forall_{x \in H} z \in \mathcal{A}_x) = \phi(z \in \mathcal{A}_{i_1}) \cdot \phi(z \in \mathcal{A}_{i_2}) \cdot \dots \\ &\cdot \phi(z \in \mathcal{A}_{i_m}) = \phi_{\mathcal{A}_{i_1}}(z) \cdot \phi_{\mathcal{A}_{i_2}}(z) \cdot \dots \cdot \phi_{\mathcal{A}_{i_m}}(z)) \end{aligned}$$

b) Unión de la familia $(\mathcal{A}_x)_{x \in H}$ de conjuntos polivalentes de U

Llamamos unión de la familia $(\mathcal{A}_x)_{x \in H}$, y la representamos por $\bigcup_{x \in H} \mathcal{A}_x$, al conjunto polivalente de U

$$\bigcup_{x \in H} \mathcal{A}_x = \{z \mid \exists_{x \in H} z \in \mathcal{A}_x\} \quad (U \text{ implícito})$$

Que es el conjunto de los elementos $z \in U$ tales que

$$\phi(z \in \bigcup_{x \in H} \mathcal{A}_x) = \phi(\exists_{x \in H} z \in \mathcal{A}_x) \neq 0$$

b₁) Por la definición

$$z \in \bigcup_{x \in H} \mathcal{A}_x \Leftrightarrow \exists_{x \in H} z \in \mathcal{A}_x$$

b₂) Para cada $z \in U$, y por II-7.2-d

$$\begin{aligned} \phi_{\bigcup_{x \in H} \mathcal{A}_x}(z) &= \phi_{\mathcal{A}_{i_1}}(z) + \phi_{\mathcal{A}_{i_2}}(z) + \dots + \phi_{\mathcal{A}_{i_m}}(z) \\ (\phi_{\bigcup_{x \in H} \mathcal{A}_x}(z) &= \phi(z \in \bigcup_{x \in H} \mathcal{A}_x) = \phi(\exists_{x \in H} z \in \mathcal{A}_x) = \phi(z \in \mathcal{A}_{i_1}) + \phi(z \in \mathcal{A}_{i_2}) + \dots \end{aligned}$$

$$+ ' \phi(z \in \mathcal{A}_{i_m}) = \phi_{\mathcal{A}_{i_1}}(z) + ' \phi_{\mathcal{A}_{i_2}}(z) + ' .. + ' \phi_{\mathcal{A}_{i_m}}(z))$$

8. Retículo de Boole completo de los conjuntos polivalentes

Como vimos, en I-3.2, que la axiomática del retículo de Boole completo abstracto es la del retículo de Boole añadiéndole tres nuevas propiedades; en el caso de los conjuntos polivalentes, estas tres nuevas propiedades, al ser \mathbb{F}_n finito, existen, y son:

1) Abreviación

$$\bigcup_{x \in H} \mathcal{A}_x = (\bigcap_{x \in H} \mathcal{A}_x^-)^-$$

2) Axiomas

$$\bigcap_{x \in H} \mathcal{A}_x \subseteq \mathcal{A}_x \text{ (para cada } x \in H)$$

3) Regla

$$B \subseteq \mathcal{A}_x \implies B \subseteq \bigcap_{x \in H} \mathcal{A}_x \text{ (para cada } x \in H)$$

Demostración de 1) (2-c₁)

$$z \in \bigcup_{x \in H} \mathcal{A}_x \Leftrightarrow \exists_{x \in H} z \in \mathcal{A}_x \Leftrightarrow \neg \forall_{x \in H} \neg z \in \mathcal{A}_x \Leftrightarrow \neg \forall_{x \in H} z \in \mathcal{A}_x^- \Leftrightarrow \neg(z \in \bigcap_{x \in H} \mathcal{A}_x^-) \Leftrightarrow z \in (\bigcap_{x \in H} \mathcal{A}_x^-)^-$$

Demostración de 2) (2-d₁)

$$z \in \bigcap_{x \in H} \mathcal{A}_x \Rightarrow \forall_{x \in H} z \in \mathcal{A}_x \Rightarrow z \in \mathcal{A}_x$$

Demostración de 3)

$$B \subseteq \mathcal{A}_x \implies z \in B \Rightarrow z \in \mathcal{A}_x \implies z \in B \Rightarrow \forall_{x \in H} z \in \mathcal{A}_x \implies \phi(z \in B) \leq ' \phi(\forall_{x \in H} z \in \mathcal{A}_x) \implies \phi(z \in B) \leq ' \phi(z \in \bigcap_{x \in H} \mathcal{A}_x) \implies z \in B \Rightarrow z \in \bigcap_{x \in H} \mathcal{A}_x \implies B \subseteq \bigcap_{x \in H} \mathcal{A}_x$$

9. Conclusión

Existe un sólo soporte axiomático para las distintas sucesiones que valoran los conjuntos polivalentes, la diferencia está sólo en la longitud de dichas sucesiones de valores: $\mathbb{F}_1, 2^1; \mathbb{F}_2, 2^2; \dots; \mathbb{F}_n, 2^n$.

En el libro indicado en I-4, tenemos demostradas, sobre el soporte axiomático común, los siguientes bloques de propiedades: IV-1'', IV-2'', IV-3'', V-1'' y V-2'', válidas sobre cualquier sucesión de valores.

Evidentemente, pueden obtenerse nuevas propiedades de la axiomática.

IV

LENGUAJE MATEMÁTICO POLIVALENTE

1. Expansión del universo del discurso (del discurrir)

Dado un universo del discurso U , universo base, construimos la sucesión de universos expansivos de

U :

$$U^{(1)} = U \cup P(U), U^{(2)} = U^{(1)} \cup P(U^{(1)}), U^{(3)} = U^{(2)} \cup P(U^{(2)}), \dots$$

Resultando que:

$$U \subset U^{(1)} \subset U^{(2)} \subset U^{(3)} \subset \dots$$

1.1 Si elegimos como universo del discurso a U o alguno de sus universos expansivos, entonces queda inalterable lo dicho sobre valoración con \mathbb{F}_n , en II-3, de las proposiciones lógicas o, en III-1, sobre el grado de pertenencia a un conjunto de cada elemento del universo en cuestión.

2. Elemento pareja ordenada, elemento triplete ordenado, etc.

a) Elemento pareja ordenada

Dados dos elementos $a_1, a_2 \in U$, sabemos que $\{a_1\}$ y $\{a_1, a_2\}$ son conjuntos de U y elementos de $U^{(1)}$, así como también que $\{\{a_1\}, \{a_1, a_2\}\}$ es conjunto de $U^{(1)}$ y elemento de $U^{(2)}$. A este elemento $\{\{a_1\}, \{a_1, a_2\}\}$ de $U^{(2)}$ lo llamamos elemento pareja ordenada y convenimos representarla por (a_1, a_2) (definición de Kuratovski), en que a_1 y a_2 son respectivamente su primera y segunda componentes.

b) Elemento triplete ordenado

Dados tres elementos $a_1, a_2, a_3 \in U$, sabemos que $(a_1, a_2), a_3 \in U^{(2)}$, y su elemento pareja ordenada $((a_1, a_2), a_3) \in U^{(4)}$. A este elemento $((a_1, a_2), a_3)$ que convenimos representar por (a_1, a_2, a_3) , lo llamamos elemento triplete ordenado en que a_1, a_2 y a_3 son respectivamente su primera, segunda y tercera componentes.

c) Y así, sucesivamente induciendo, obtendremos elementos cuatripletas de $U^{(6)}$ y, si $t \geq 5$, t -pletas de $U^{(2^{(t-1)})}$.

Propiedad:

Se demuestra que, para $t \geq 2$

$$(x_1, x_2, \dots, x_t) = (x'_1, x'_2, \dots, x'_t) \Rightarrow x_1 = x'_1 \wedge x_2 = x'_2 \wedge \dots \wedge x_t = x'_t$$

3. Producto cartesiano de conjuntos polivalentes

a) Producto cartesiano de dos conjuntos polivalentes

Llamamos producto cartesiano de los conjuntos polivalentes A_1 y A_2 de U , y lo representamos por $A_1 \times A_2$, al conjunto polivalente de $U^{(2)}$

$$A_1 \times A_2 = \{(x_1, x_2) \mid x_1 \in A_1 \wedge x_2 \in A_2\} \quad (U^{(2)} \text{ implícito})$$

Que es el conjunto de los elementos $(x_1, x_2) \in U^{(2)}$ tales que

$$\phi((x_1, x_2) \in A_1 \times A_2) = \phi(x_1 \in A_1 \wedge x_2 \in A_2) \neq 0$$

(Siendo \mathbb{P}_2 el colectivo de todas las proposiciones sobre $U^{(2)}$ y $\phi : \mathbb{P}_2 \rightarrow \mathbb{F}_n$)

a₁) Por la definición

$$(x_1, x_2) \in A_1 \times A_2 \Leftrightarrow x_1 \in A_1 \wedge x_2 \in A_2$$

b) Producto cartesiano de tres conjuntos polivalentes $A_1, A_2, A_3 \in P(U)$

Sabemos que $A_1 \times A_2$ y A_3 son conjuntos polivalentes de U^2 , y su producto cartesiano $(A_1 \times A_2) \times A_3$, que convenimos representar por $A_1 \times A_2 \times A_3$, es un conjunto polivalente de U^4 .

c) Y así, sucesivamente induciendo, obtendríamos productos cartesianos de cuatro conjuntos polivalentes de U^6 y, si $t \geq 2$, productos cartesianos de t conjuntos polivalentes de $U^{2 \cdot (t-1)}$.

Propiedad:

Siendo $\mathbb{P}_{2 \cdot (t-1)}$ el colectivo de todas las proposiciones sobre $U^{2 \cdot (t-1)}$, por II-3.1, para $t \geq 2$ y

$$\phi : \mathbb{P}_{2 \cdot (t-1)} \rightarrow \mathbb{F}_n$$

$$\begin{aligned} \phi_{A_1 \times A_2 \times \dots \times A_t}(x_1, x_2, \dots, x_t) &= \phi_{A_1}(x_1) \cdot \phi_{A_2}(x_2) \cdot \dots \cdot \phi_{A_t}(x_t) \\ (\phi_{A_1 \times A_2 \times \dots \times A_t}(x_1, x_2, \dots, x_t) &= \phi((x_1, x_2, \dots, x_t) \in A_1 \times A_2 \times \dots \times A_t) = \phi(x_1 \in A_1 \wedge x_2 \in A_2 \wedge \dots \wedge \\ x_t \in A_t) &= \phi(x_1 \in A_1) \cdot \phi(x_2 \in A_2) \cdot \dots \cdot \phi(x_t \in A_t) = \phi_{A_1}(x_1) \cdot \phi_{A_2}(x_2) \cdot \dots \cdot \phi_{A_t}(x_t)) \end{aligned}$$

4. Correspondencias sobre productos cartesianos

Siendo $t \geq 2$ y dado $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_t$, llamamos correspondencia sobre este producto cartesiano a cualquier subconjunto de él.

Si $K_t \subseteq A_1 \times A_2 \times \dots \times A_t$, K_t es una correspondencia sobre dicho producto cartesiano y

$$\begin{aligned} \phi_{K_t}(x_1, x_2, \dots, x_t) &\leq \phi_{A_1}(x_1) \cdot \phi_{A_2}(x_2) \cdot \dots \cdot \phi_{A_t}(x_t) \\ (\phi_{K_t}(x_1, x_2, \dots, x_t) &\leq \phi_{A_1 \times A_2 \times \dots \times A_t}(x_1, x_2, \dots, x_t) = \phi_{A_1}(x_1) \cdot \phi_{A_2}(x_2) \cdot \dots \cdot \phi_{A_t}(x_t)) \end{aligned}$$

5. Las correspondencias son la esencia del lenguaje matemático

Son correspondencias:

Las relaciones de equivalencia sobre un conjunto. Las relaciones de orden sobre un conjunto. Las aplicaciones sobre dos conjuntos. Las operaciones unitarias internas o externas. Las operaciones binarias internas o externas. etc.

6. Notas

1) Lo tratado en este capítulo está desarrollado, por el autor de este trabajo, en el libro "Lenguaje Matemático" (632 pp.), publicado por el Servicio de Publicaciones de la Universidad de Oviedo.

2) El libro está desarrollado con lenguaje conjuntista y valorado binariamente en \mathbb{F}_1 ; pero creo que podría valorarse polivalentemente sobre \mathbb{F}_n , para $n \geq 2$, siguiendo la marcha desarrollada en los capítulos II, III y IV de este trabajo.